

**А. Ф. Крячко, В. М. Лихачев, К. В. Антонов, Я. Я. Левин**

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения,  
Санкт-Петербург, Россия

## ОСОБЕННОСТИ РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ТЕЛАХ С ИЗЛОМАМИ ПОВЕРХНОСТИ

*Приведен анализ формирования рассеянного поля, когда падающую и отраженную волны вблизи кромки можно считать плоскими, с помощью асимптотики Малюжинца и метода асимптотического сшивания.*

**Ключевые слова:** электромагнитное поле, асимптотика, дифракция, импеданс.

Для цитирования: Крячко А. Ф., Лихачев В. М., Антонов К. В., Левин Я. Я. Особенности рассеяния электромагнитных волн на телах с изломами поверхности // Радиопромышленность. 2017. № 1. С. 63–67.

**A. F. Kryachko, V. M. Likhachev, K. V. Antonov, Y. Y. Levin**

Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Saint-Petersburg, Russia

## FEATURES OF ELECTROMAGNETIC WAVES SCATTERING ON BODIES WITH FRACTURED SURFACE

*The work contains the analysis of the formation of a scattered field where the incident and reflected waves near the edge can be recognized flat, with application of Malyuzhinets asymptotics and the asymptotic matching method.*

**Keywords:** electromagnetic field, asymptotic, diffraction, impedance.

For citation: Kryachko A. F., Likhachev V. M., Antonov K. V., Levin Y. Y. Features of electromagnetic waves scattering on bodies with fractured surface. Radiopromyshlennost, 2017, no. 1, pp. 63–67 (In Russian).

DOI 10.21778/2413-9599-2017-1-63-67

Проведем анализ формирования рассеянного поля на основе решения задачи дифракции электромагнитной волны на поверхности с кромкой, когда падающую и отраженную волны вблизи кромки можно считать плоскими. Такой подход допустим, если освещенная поверхность рассеивающего тела вблизи кромки прямолинейна. Для случая прямолинейной затененной поверхности вблизи кромки и отсутствия условий формирования волн шепчущей галереи и волн соскальзывания можно воспользоваться модельной задачей дифракции на клине с прямыми гранями. Вследствие этого вычисление полей значительно упрощается, и становится возможным получение аналитического решения с использованием асимптотики Малюжинца [1], а также метода асимптотического сшивания [2].

Анализ рассеянного поля построим на основе двумерной задачи дифракции электромагнитной волны на криволинейном клине, расположенном в однородной непоглощающей среде. Геометрия задачи представлена на рис. 1.

Поскольку случаи, когда вектор  $\vec{E}$  падающего поля перпендикулярен плоскости падения либо параллелен ей, отличаются лишь граничными условиями вида

$$\frac{\partial E_{\tau}}{\partial \bar{n}} + ik \frac{W_0}{W_s} E_{\tau} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial H_{\tau}}{\partial \bar{n}} + ik \frac{W_s}{W_0} H_{\tau} = 0, \quad (2)$$

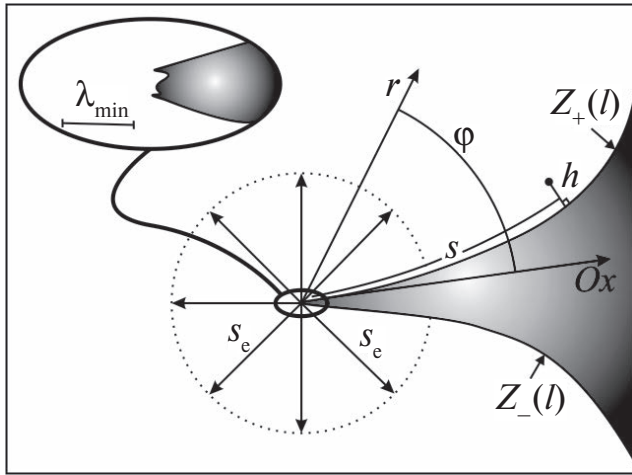


Рисунок 1. Рассеяние электромагнитных волн на вогнутом клине

задача сводится к решению скалярного уравнения Гельмгольца с граничными условиями

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{n}} + ikZ(\bar{r})U = 0 \quad (3)$$

независимо от поляризации. Здесь  $k = \omega/c$  – волновое число,  $W_s$  – коэффициент пропорциональности, называемый поверхностным импедансом,  $W_o$  – импеданс окружающей поверхность среды,  $\bar{n}$  – нормаль к поверхности,  $U$  – одна из тангенциальных компонент  $E_{\tau}$ ,  $H_{\tau}$ , а коэффициент  $Z(\bar{r})$  в зависимости от поляризации равен  $W_s/W_o$  либо  $W_o/W_s$ . Также будем считать, что грань  $\bar{r}_2$  расположена в тени падающего поля. Противоположный случай рассматривается аналогично (добавляется волна, отраженная от нижней грани). Коэффициенты  $Z(\bar{r})$  в граничных условиях (3) для освещенной и затененной граней обозначим через  $Z_{\pm}(l)$ . Будем считать их непрерывными функциями, достаточно мало изменяющимися на длине падающей волны, и называть импедансами граней.

Пусть падающая волна задана своим лучевым разложением

$$U_i = \exp(iks_i(\bar{r})) \sum_n A_n^i(\bar{r}) \left(\frac{i}{k}\right)^n,$$

радиус-векторы граней клина  $\bar{r}_{1,2}$  заданы в параметрическом виде  $\bar{r}_{1,2}(l, z) = (r_{1,2}(l), \varphi_{1,2}(l), z)$ , где  $l$  – длина отрезка кривой  $(O, \bar{r}_{1,2})$ . Будем считать, что показатель преломления среды равен единице. Для большей определенности также будем считать, что грань  $\bar{r}_2$  расположена в тени падающего поля.

Лучевое поле отраженной волны

$$U_r = \exp(iks_r(\bar{r})) \sum_n A_n^r(\bar{r}) \left(\frac{i}{k}\right)^n$$

будем считать известным.

Применение равномерной теории дифракции дает возможность рассматривать, что падающая волна возбуждает равномерную цилиндрическую краевую волну с осью на кромке [2]. Кроме того, если радиус кривизны грани клина на кромке отрицателен, падающей волной возбуждаются также волны соскальзывания, и наоборот, при положительном радиусе кривизны образуются волны шепчущей галереи. В случае, если  $-\pi/2 \leq Z_{\pm}(l) < 0$ , на соответствующей грани образуются также простейшие поверхностные волны. Волны соскальзывания, шепчущей галереи, а также простейшие поверхностные волны имеют по крайней мере часть оптического пути, совпадающего с поверхностью клина.

Полное дифракционное поле при таком подходе имеет вид

$$U = \sum_p U_p F\left(\sqrt{k(s_{kp} - s_p)}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{k}\right)^{n+\frac{1}{2}} B_n e^{iks_{kp}}, \quad (4)$$

где  $F(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^x e^{i\xi^2} d\xi$  – интеграл Френеля [3];  $U_p$  – лучевые разложения падающей и отраженных волн;  $s_p$  – соответствующие им эйконалы;  $s_{kp}$  – эйконал краевой волны;  $B_n$  – подлежащие определению непрерывные функции поперечных лучевых координат краевой волны  $(\alpha, \beta)$  [2]. Если известно поле, построенное по правилам геометрической теории дифракции (ГТД), то функции  $B_n$  обычно находятся так называемым методом асимптотического сшивания [2]. При этом интегралы Френеля заменяются асимптотиками:

$$F(x) \approx \sigma(x) - i \frac{e^{ix^2}}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{(ix^2)^{n+\frac{1}{2}}}, \quad (5)$$

где  $\Gamma(x)$  – гамма-функция [4];  $\sigma(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ , после чего выражение (4) приравнивается к выражению ГТД и находятся функции  $B_n$ . В случае, если асимптотика ГТД неизвестна, равномерная краевая волна может быть найдена из неоднородных уравнений переноса, получаемых при подстановке главного члена выражения (4) в уравнение Гельмгольца

$$2(\nabla B_n, \nabla s_{kp}) + B_n \Delta s_{kp} = \Delta B_{n-1} + \sum_p (2\nabla \theta \nabla A_{p,n} + A_{p,n} \Delta \theta), \quad (6)$$

где  $\theta = \sqrt{s_{kp} - s_p} / \sqrt{\pi}$ ,  $A_{p,n}$  – амплитуды лучевых разложений  $U_p$  [2]. Данный метод был назван равномерной асимптотической теорией (РАТ). Он теоретически позволяет находить поле дифракции на кромке с произвольной точностью при удержании соответствующего числа членов в лучевом разложении равномерной краевой волны. Эти волны будем называть поверхностными волнами (ПВ).

С учетом вышесказанного, а также учитывая вид полного дифракционного поля (4), полное поле в рамках РАТ будем искать в виде

$$U = U_i F\left(\sqrt{k(s_e - s_i)}\right) + U_r F\left(\sqrt{k(s_e - s_r)}\right) + U_e + U_{ss} + U_{si}, \quad (7)$$

где  $U_e, U_{ss}, U_{si}$  – подлежащие определению поля краевой волны и ПВ, распространяющихся вдоль затененной и освещенной граней соответственно.

Если принять освещенную грань за ось  $OX$  полярной системы координат (рис. 1), то равномерная краевая волна в выражении (4) примет вид

$$U_e = -\left[ \left( \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \varphi_0 + \pi}{2n} - \operatorname{ctg} \frac{\varphi + \varphi_0 + \pi}{2n} \right) \Psi\left(\frac{n\pi}{2} - \varphi - \pi\right) + \right. \\ \left. + R \left( \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \varphi_0 - \pi}{2n} - \operatorname{ctg} \frac{\varphi + \varphi_0 - \pi}{2n} \right) \Psi\left(\frac{n\pi}{2} - \varphi + \pi\right) \right] \times \\ \times \frac{\exp\left(i\left(kr + \frac{\pi}{4}\right)\right)}{2n\Psi\left(\frac{n\pi}{2} - \varphi_0\right)\sqrt{2\pi kr}} + \frac{1}{2} \left[ \left( \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right)^{-1} + \right. \\ \left. + R \left( \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right)^{-1} \right] \frac{\exp\left(i\left(kr + \frac{\pi}{4}\right)\right)}{\sqrt{2\pi kr}}, \quad (8)$$

где  $n = \frac{\Phi}{\pi}$ ,  $\Phi$  – угол между касательными к граням в точке  $O$ ;  $\varphi_0$  – угол между лучами падающей волны и осью  $OX$ ;  $\theta_0^\pm = \arcsin(Z_\pm)$ ,  $Z_\pm$  – значения импедансов освещенной и затененной граней соответственно на кромке;  $R = [\sin \varphi_0 - Z_+] / [\sin \varphi_0 + Z_+]$  – коэффициент отражения ГО от верхней грани клина, а функция  $\Psi(z)$  задается выражением

$$\Psi(z) = \Psi_{\Phi_0}\left(z + \Phi_0 + \frac{\pi}{2} - \theta_0^+\right) \Psi_{\Phi_0}\left(z - \Phi_0 - \frac{\pi}{2} + \theta_0^-\right) \times \\ \times \Psi_{\Phi_0}\left(z + \Phi_0 - \frac{\pi}{2} + \theta_0^+\right) \Psi_{\Phi_0}\left(z - \Phi_0 + \frac{\pi}{2} - \theta_0^-\right),$$

где  $\Psi_{\Phi}(\alpha) = \exp\left(\frac{i}{8\Phi} \int_0^\alpha \int_{-i\infty}^{i\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi v}{4\Phi \cos(v-\mu)} dv d\mu\right)$  – функция Малюжинца;  $\Phi_0 = \frac{n\pi}{2}$ . На границах свет-тень падающей и отраженной волн (при  $\varphi = \pi \pm \varphi_0$ ) полюсы выражений с косинусами и котангенсами взаимно компенсируются, и полное поле остается непрерывным.

В данном случае также можно вычислить в аналитическом виде произвольный член краевой волны, поскольку все члены ее лучевого разложения выражаются через нулевой член [2]

$$U_e = e^{ikr} \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{i}{kr}\right)^{p+\frac{1}{2}} D_p^\Phi C_0(\varphi), \quad (9)$$

где операторы  $D_p^\Phi$  задаются формулами [2]

$$D_0^\Phi = 1; D_1^\Phi = -\frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{d\varphi^2} + \frac{1}{4} \right); \dots \quad (10)$$

$$D_n^\Phi = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \left( \frac{d^2}{d\varphi^2} + \frac{1}{4} \right) \left( \frac{d^2}{d\varphi^2} + \frac{9}{4} \right) \times \dots \times \left( \frac{d^2}{d\varphi^2} + \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \right).$$

Сравнительный анализ показывает, что имеется ряд ограничений при использовании подхода РАТ. При вычислении поля в случае идеально проводящей поверхности вблизи затененной грани увеличивается ошибка в вычислении поля при помощи РАТ с модифицированным коэффициентом отражения. Это происходит вследствие отказа от учета граничных условий на затененной грани в пользу упрощения результирующих выражений.

При вычислениях поля на импедансных поверхностях вблизи затененной поверхности ошибка в вычислении поля для РАТ с краевой волной (8) возрастает более чем в два раза. Это подтверждает непригодность метода для вычисления полей в затененной области.

Изменение импеданса граней значительно влияет на диаграмму рассеяния полного поля, причем наибольшее влияние на положение и размер интерференционных максимумов оказывает импеданс освещенной грани. Так, положительная действительная часть импеданса уменьшает амплитуду отраженного поля, а значит, уменьшает интерференционные максимумы и увеличивает минимумы. При падении под углом Брюстера, т.е. когда импеданс  $Z_+$  оказывается равным синусу угла падения  $\varphi_0$ , отраженное лучевое поле равно нулю, и осцилляции амплитуды становятся минимальными. При отрицательной действительной части импеданса происходит усиление отраженного поля (его амплитуда становится больше амплитуды падающей волны). Такие импедансы могут быть использованы при моделировании активных устройств. Мнимая часть импеданса влияет как на фазу, так и на амплитуду отраженного поля. Соответствующим подбором мнимой части можно управлять положением максимумов и минимумов полного поля. При стремлении импеданса к нулю полное лучевое поле стремится к решению задачи Неймана, а при стремлении к бесконечности – к решению задачи Дирихле. Импеданс затененной грани в основном определяет поле в теневой области. Наибольшая амплитуда поля в этой области наблюдается при нулевом импедансе.

Следует отметить, что РАТ с краевой волной в виде (8) неадекватно описывает рассеянное поле при углах падения плоской волны, близких к скользким, т.е., когда угол  $\varphi_0$  стремится к одному из значений  $0, \pi, \Phi, 2\pi - \Phi$ . В этой ситуации границы свет-тень приближаются друг к другу и в пределе сливаются в один луч.

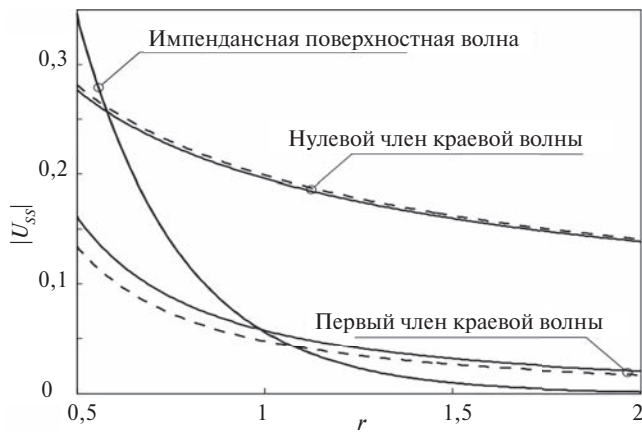


Рисунок 2. Амплитуды дифракционных волн

Рассмотрим далее возбуждение простейших поверхностных волн. Асимптотика этих волн при  $k \rightarrow \infty$  в задаче дифракции плоской волны на клине с прямыми гранями была найдена в работе [1]. Она имеет прямую границу свет-тень, находящуюся в секторах  $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ;  $\varphi \in \left[\frac{(n-1)\pi}{2}, \frac{n\pi}{2}\right]$ , для освещенной и затененной грани соответственно, при условии  $\text{Re}\theta_{\pm} > 0$ . Поле этой волны имеет вид [5]

$$U_{surf\pm}^{imp} = \begin{cases} C_{\pm} \exp(ikr \cos(\Phi_0 + \theta_{\pm} \mp (\Phi_0 - \varphi))), & \text{если } \delta \geq 0; \\ 0, & \text{если } \delta < 0, \end{cases} \quad (11)$$

где

$$C_{\pm} = \frac{2 \sin \frac{\pi^2}{4\Phi_0} \cos \frac{\pi\varphi_0}{4\Phi_0} \Psi_{\Phi_0} \left(2\Phi_0 - \frac{\pi}{2}\right) \Psi^{(\pm)}(\pm(\Phi_0 + \pi + \theta_{\pm}))}{\cos \frac{\pi(\pi + \theta_{\pm})}{4\Phi_0} \mp \sin \frac{\pi\varphi_0}{4\Phi_0} \Psi(\Phi_0 - \varphi_0)}, \quad (12)$$

$\delta = \text{gd}(\text{Im}\theta_{\pm}) - \text{Re}\theta_{\pm} - \varphi$  для верхней грани и  $\delta = \text{gd}(\text{Im}\theta_{\pm}) - \text{Re}\theta_{\pm} - n\pi + \varphi$  для нижней грани. Остальные обозначения соответствуют формуле (8). Коэффициенты  $C_{\pm}$ , по сути, являются асимптотическими значениями коэффициентов возбуждения простейших поверхностных волн падающей плоской волной.

## БЛАГОДАРНОСТЬ

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 15-07-00205-а.

## ACKNOWLEDGEMENT

This work was performed under support from the Russian Foundation for basic research, grant No. 15-07-00205-a.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малюжинец Г.Д. Возбуждение, отражение и излучение поверхностных волн на клине с заданными импедансами граней // Доклады АН СССР. 1958. Т. 121, № 3. С. 436–439.
2. Боровиков В. А., Кинбер Б.Е. Геометрическая теория дифракции. М.: Связь, 1978. 248 с.
3. Бобровников М.С., Фисанов В.В. Дифракция волн в угловых областях. Томск: Изд-во Томского ун-та, 1988. 245 с.
4. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица и И. Стигана. М.: Наука, 1979. 832 с.
5. Крячко А.Ф., Лихачев В.М., Невейкин М.Е. Рассеяние электромагнитных волн на теле произвольного поперечного сечения. Высокочастотная асимптотика // Успехи современной радиоэлектроники. 2013. № 2. С. 29–36.

На рис. 2 показаны зависимости амплитуд первого, второго асимптотического членов краевой волны, а также амплитуды поверхностной волны от расстояния до кромки при параметрах  $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$ ;  $\Phi = \frac{3\pi}{2}$ ;  $Z_+ = 0$ ;  $Z_- = 0,5 - i$ ;  $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ .

Пунктирные линии соответствуют асимптотическим выражениям Малюжинца (8), (11), а сплошные – РАТ с численными дифракционными коэффициентами. Сшивание производилось решением системы линейных алгебраических уравнений вида

$$U_{num}(r_{1,2,3}) = \frac{Q_0}{(kr_{1,2,3})^2} \exp(ikr_{1,2,3}) + \frac{Q_1}{(kr_{1,2,3})^3} \exp(ikr_{1,2,3}) + Q_2 U_{surf}(r_{1,2,3}), \quad (13)$$

где  $U_{num}(r_{1,2,3})$  – численное решение в окрестности кромки;  $Q_{0,1,2}$  – амплитуды первого, второго асимптотического членов краевой волны, а также поверхностной волны соответственно;  $kr_1 = 8$ ;  $kr_2 = 9$ ;  $kr_3 = 10$ .

На рис. 2 видно, что в этом случае амплитуда поверхностной волны определена с достаточно большой точностью (практически совпадает со значением выражения (11)). Отклонение амплитуд членов краевой волны от значений выражений (8)–(10) происходит, кроме ошибок численных методов, вследствие того, что численное решение (в данном случае решение МКЭ) содержит члены  $(kr)^{-\frac{5}{2}}, (kr)^{-\frac{7}{2}}, \dots$ , которые на больших расстояниях от кромки довольно малы, однако при сшивании на расстояниях порядка длины волны вносят погрешности в процесс вычисления амплитуд. Поэтому для увеличения точности расчета членов краевой волны необходимо увеличивать радиус численного решения в окрестности кромки.

## REFERENCES

1. Malyuzhinets G.D. Vozbuzhdenie, otrazhenie i izluchenie poverhnostnyh voln na kline s zadannymi impedansami granej. [Excitation, reflection and radiation of surface waves on a wedge with specified impedances of facets]. *Reports of the USSR Academy of Sciences* 1958, Vol. 121, no. 3, pp. 436–439 (In Russian).
2. Borovikov V.A., Kinber B.E. *Geometricheskaja teorija difrakcii* [Geometrical theory of diffraction]. Moscow: Svyaz Publ., 1978, 248 p. (In Russian).
3. Bobrovnikov M.S., Fisanov V.V. *Difrakcija voln v uglovyh oblastjakh* [Diffraction of waves in angular areas]. Tomsk: Publishing house of Tomsk University, 1988, 245 p. (In Russian).
4. *Spravochnik po special'nyh funkcijam* [Handbook of Mathematical Functions]. Edited by M. Abramovitz and I. Stigan. Moscow, Nauka Publ., 1979, 832 p. (In Russian).
5. Kryachko A.F., Likhachev V.M., Neveykin M.E. Scattering of electromagnetic waves on the body of arbitrary cross-section. High-frequency asymptotic. *Uspehi sovremennoj radioelektroniki*, 2013, no. 2, pp. 29–36 (In Russian).

## ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

**Крячко Александр Федотович**, д.т.н., профессор, зав. кафедрой, Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, 190000, Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, д. 67, лит. А, тел.: 8 (921) 956-71-40, e-mail: alex\_k34.ru@mail.ru.

**Лихачев Владимир Михайлович**, аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, 190000, Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, д. 67, лит. А, тел.: 8 (812) 494-70-18, e-mail: kaf21@guap.ru.

**Антонов Кирилл Валерьевич**, аспирант, ведущий инженер, Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, 190000, Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, д. 67, лит. А, тел.: 8 (911) 294-18-68, e-mail: kartovan@gmail.com.

**Левин Яков Яковлевич**, аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, 190000, Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, д. 67, лит. А, тел.: 8 (812) 494-70-18, e-mail: kaf21@guap.ru.

## AUTHORS

**Kryachko Aleksandr**, Dr., Professor, head of department Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, Bolshaya Morskaya st., Saint-Petersburg, 190000, Russian Federation, tel.: +7 (921) 956-71-40, e-mail: alex\_k34.ru@mail.ru.

**Likhachev Vladimir**, postgraduate student, Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, Bolshaya Morskaya st., Saint-Petersburg, 190000, Russian Federation, tel.: +7 (812) 494-70-18 e-mail: kaf21@guap.ru.

**Antonov Kirill**, postgraduate student, leading engineer, Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, Bolshaya Morskaia st., Saint-Petersburg, 190000, Russian Federation, tel.: +7 (911) 294-18-68, e-mail: kartovan@gmail.com.

**Levin Yakov**, postgraduate student, Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, Bolshaya Morskaya st., Saint-Petersburg, 190000, Russian Federation, tel.: +7 (812) 494-70-18, e-mail: kaf21@guap.ru.