

И. С. Савиных, Д. А. Чемасов

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ ИНТЕРПОЛИРОВАННОГО ФИЛЬТРА НИЖНИХ ЧАСТОТ

Отсутствие фазовых искажений является определяющим для цифровых систем связи, поэтому в них используют дискретные фильтры с конечной импульсной характеристикой, которые не вносят таких искажений. Недостаток этих фильтров – большие вычислительные затраты. В статье рассмотрены интерполированные фильтры нижних частот с конечной импульсной характеристикой. Определено максимальное значение коэффициента интерполяции в зависимости от полосы заграждения фильтра. Получена зависимость коэффициента вычислительной эффективности интерполированных фильтров нижних частот от коэффициента интерполяции, ширины полосы пропускания и ширины полосы перехода. Показано, что соотношение для коэффициента вычислительной эффективности может быть применено для определения коэффициентов фильтров методами взвешивания, частотной выборки, а также оптимальным методом. Кроме того, получена формула для расчета оптимального коэффициента интерполяции, соответствующего максимальному коэффициенту вычислительной эффективности.

Ключевые слова: фильтры с конечной импульсной характеристикой, интерполированные фильтры, вычислительная эффективность, оптимальный коэффициент интерполяции.

Для цитирования: Савиных И. С., Чемасов Д. А. Вычислительная эффективность интерполированного фильтра нижних частот // Радиопромышленность. 2018. № 2. С. 58–62.

I. S. Savinykh, D. A. Chemasov

Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia

COMPUTING EFFICIENCY OF THE INTERPOLATED LOW PASS FILTERS

Zero phase distortions is essential for digital communication systems, therefore, discrete filters are used therein with finite impulse response, and such filters do not make such distortions. The disadvantages of these filters are high computational costs. The article presents interpolated low-pass filters with finite impulse response. The maximum value of the interpolation coefficient is determined depending on the filter attenuation band. The dependence of the factor of computational efficiency of interpolated low-pass filters on the interpolation factor, bandwidth and transition bandwidth is obtained. It is shown that the ratio for the factor of computational efficiency can be applied to determine the filter factors by weighing methods, frequency sampling, and also by the optimal method. In addition, a ratio is obtained for calculating the optimum interpolation coefficient corresponding to the maximum coefficient of computational efficiency.

Keywords: filters with finite impulse response, interpolated filters, computational efficiency, optimal interpolation factor.

For citation: Savinykh I. S., Chemasov D. A. Computing efficiency of the interpolated low pass filters. Radiopromyshlennost, 2018, no. 2, pp. 58–62. (In Russian).

DOI 10.21778/2413-9599-2018-2-58-62

Введение

В цифровых системах связи для формирования и обработки сигналов используют цифровые узкополосные фильтры нижних частот (ФНЧ) [1]. Цифровые фильтры синтезируются как дискретные фильтры с конечной импульсной характеристикой

(КИХ-фильтры) или с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-фильтры) с последующим учетом эффектов конечной разрядности [2, 3]. КИХ-фильтры, в отличие от БИХ-фильтров, могут иметь линейную фазочастотную характеристику (ФЧХ) и, как следствие, не вносить фазовых искажений.

Кроме того, КИХ-фильтры всегда устойчивы и менее подвержены эффектам конечной разрядности, нежели БИХ-фильтры. Однако с вычислительной точки зрения КИХ-фильтры менее эффективны [2, 3]. Отсутствие фазовых искажений является определяющим для цифровых систем связи [1]. Поэтому, несмотря на большие вычислительные затраты, используют именно КИХ-фильтры [1, 2].

Применение интерполированных фильтров позволяет уменьшить вычислительные затраты при расчете отклика цифровых узкополосных ФНЧ [3, 4]. Интерполированный ФНЧ представляет собой двухкаскадный фильтр. Первым каскадом является ФНЧ с интерполированной импульсной характеристикой. Вторым – фильтр подавления побочных составляющих (ФППС). ФППС – это тоже ФНЧ, обеспечивающий подавление побочных полос пропускания, возникающих вследствие интерполяции импульсной характеристики в первом каскаде. Интерполяция импульсной характеристики осуществляется добавлением нулевых отсчетов между существующими. Поэтому импульсная характеристика расширяется, а амплитудно-частотная характеристика сжимается. В результате этого появляются побочные полосы пропускания (подавляемые ФППС), но количество вычислений вследствие применения интерполяции может стать меньше, чем у неинтерполированного ФНЧ [3, 4].

Прежде чем использовать интерполированные ФНЧ, необходимо убедиться в возможности и целесообразности их реализации для заданных параметров проектируемого фильтра (полосы пропускания, заграждения и перехода) и выбранного коэффициента интерполяции. Поэтому нужно определить границы реализуемости фильтра и найти коэффициент его вычислительной эффективности в зависимости от заданных параметров фильтра и коэффициента интерполяции, как это, например, сделано для полосовых фильтров [5]. Кроме того, целесообразно определить значение коэффициента интерполяции, при котором коэффициент вычислительной эффективности принимает максимальное значение.

Цель работы – получение соотношений для определения границы реализуемости интерполированного ФНЧ, для расчета коэффициента его вычислительной эффективности, а также определения оптимального значения коэффициента интерполяции.

Определение коэффициента вычислительной эффективности

При синтезе КИХ-фильтра определяются отсчеты импульсной характеристики $h[k]$, они же являются коэффициентами этого фильтра. Отсчеты выходного сигнала находят из соотношения

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]x[n-k]. \quad (1)$$

Здесь $y[n]$, $x[n]$ – отсчеты соответственно выходного и входного сигналов; N – порядок фильтра.

Из соотношения (1) видно, что количество операций умножения равно порядку фильтра N , а количество операций сложения на единицу меньше $(N - 1)$. Кроме того, количество регистров (или используемый объем памяти данных) также равно N , хотя для различных реализаций фильтра правильнее считать его кратным N [2, 3].

Как говорилось ранее, интерполированный фильтр состоит из двух каскадов – ФНЧ с интерполированной импульсной характеристикой и ФППС. Интерполирование импульсной характеристики ФНЧ первого каскада (с порядком, равным N_{LPF}) в L раз производится вставлением $L - 1$ нулевых отсчетов между изначальными отсчетами. При этом в частотной области произойдет сужение амплитудно-частотной характеристики в L раз. Вследствие того что с нулевыми отсчетами импульсной характеристики нет необходимости производить математические операции, то при общем порядке фильтра с интерполированной импульсной характеристикой LN_{LPF} количество операций умножения составляет N_{LPF} , а количество операций сложения $N_{LPF} - 1$. Однако отсчеты входной последовательности необходимо сохранять в количестве, соответствующем порядку фильтра, т.е. LN_{LPF} . ФППС в общем случае имеет ненулевые значения всех коэффициентов. Поэтому при его порядке, равном N_{MF} количество операций умножения составляет N_{MF} количество операций сложения $N_{MF} - 1$, а количество регистров N_{MF} .

При использовании интерполированного фильтра количество операций сложения и умножения может быть сокращено [4, 5]. Поэтому определим коэффициенты вычислительной эффективности интерполированного фильтра по операциям умножения и сложения по формулам

$$E_m = \frac{N}{N_{LPF} + N_{MF}};$$

$$E_s = \frac{N-1}{N_{LPF} + N_{MF} - 2}.$$

С учетом того что коэффициенты вычислительной эффективности по операциям умножения и сложения являются приблизительно одинаковыми для больших значений порядков фильтров ($E_m \approx E_s$), а также в связи с тем, что с аппаратной точки зрения сложнее реализовывать операции умножения, определим коэффициент вычислительной эффективности интерполированного фильтра по формуле

$$E = E_m = \frac{N}{N_{LPF} + N_{MF}}. \quad (2)$$

При использовании интерполированного фильтра количество регистров, как правило, увеличивается (за счет применения ФППС) [4]. Поэтому определим коэффициент увеличения количества регистров как

$$U = \frac{LN_{LPF} + N_{MF}}{N}. \quad (3)$$

Для метода взвешивания, метода частотной выборки и оптимального метода порядок КИХ-фильтра можно определить из соотношения [2–4]

$$N \geq \frac{K}{\Delta f_{trans}}, \quad (4)$$

где K – коэффициент, определяемый используемым методом синтеза фильтра; Δf_{trans} – ширина полосы перехода фильтра.

Следует отметить, что в соотношении (4) полоса перехода является нормированной на частоту дискретизации. Поэтому для получения более общих соотношений здесь и далее будем считать все частоты нормированными на частоту дискретизации.

В случае расчета коэффициентов фильтра методом взвешивания K определяют исходя из выбранной взвешивающей функции [2]. При методе частотной выборки – количеством отсчетов в полосе перехода, увеличенным на единицу [2, 3]. При использовании оптимального метода K вычисляют из формулы, зависящей от неравномерности амплитудно-частотной характеристики в полосе пропускания и минимального затухания в полосе заграждения [4]. В дальнейшем будем считать, что применяется один и тот же метод расчета коэффициентов фильтров, сравниваемых при определении коэффициента вычислительной эффективности по формуле (2) и коэффициента увеличения количества регистров по формуле (3). Это позволит устранить влияние метода расчета коэффициентов фильтра на оценку эффективности интерполированных фильтров.

Для интерполированного фильтра полоса перехода должна быть такая же, как и для неинтерполированного, поэтому с учетом соотношения (4) можно записать

$$LN_{LPF} \geq \frac{K}{\Delta f_{trans}}.$$

Следовательно,

$$N_{LPF} \geq \frac{K}{L\Delta f_{trans}}, \quad (5)$$

или

$$N_{LPF} = \frac{N}{L}.$$

При интерполяции амплитудно-частотной характеристики ФНЧ с интерполированной импульсной характеристикой сжимается, вследствие чего появляются дополнительные полосы пропускания,

которые должны быть подавлены ФППС. При коэффициенте интерполяции L , с учетом того что все частоты нормированы на частоту дискретизации, ближайшая дополнительная полоса, которую следует подавлять, находится в диапазоне $1/L \pm \Delta f_S$ (где Δf_S – ширина полосы заграждения интерполированного фильтра). Поэтому ширина полосы заграждения ФППС не должна превышать

$$\Delta f_{S_{MF}} = \frac{1}{L} - \Delta f_S. \quad (6)$$

В предельном случае, когда ширины полос заграждения ФППС и интерполированного фильтра равны, получаем максимальное значение коэффициента интерполяции:

$$L_{max} = \frac{1}{2\Delta f_S}. \quad (7)$$

Ширина полосы пропускания ФППС должна быть не меньше, чем ширина полосы пропускания интерполированного фильтра Δf_{BW} . Следовательно, с учетом формулы (6) полосу перехода ФППС найдем по формуле

$$\begin{aligned} \Delta f_{trans_{MF}} &= \Delta f_{S_{MF}} - \Delta f_{BW} = \frac{1}{L} - \Delta f_S - \Delta f_{BW} = \\ &= \frac{1}{L} - \Delta f_{trans} - 2\Delta f_{BW}. \end{aligned} \quad (8)$$

Исходя из формул (4) и (8) определим порядок ФППС:

$$N_{MF} \geq \frac{K}{\frac{1}{L} - \Delta f_{trans} - 2\Delta f_{BW}}. \quad (9)$$

С учетом (2), (4), (5) и (9) формула для расчета коэффициента вычислительной эффективности интерполированного фильтра примет вид

$$\begin{aligned} E &= \frac{\frac{K}{\Delta f_{trans}}}{\frac{K}{L\Delta f_{trans}} + \frac{1}{\frac{1}{L} - \Delta f_{trans} - 2\Delta f_{BW}}} = \\ &= \frac{1 - (\Delta f_{trans} + 2\Delta f_{BW})L}{\frac{1}{L} - (\Delta f_{trans} + 2\Delta f_{BW}) + \Delta f_{trans}L}. \end{aligned} \quad (10)$$

С учетом соотношений (3)–(5) и (9) коэффициент увеличения количества регистров

$$\begin{aligned} U &= \frac{L\frac{K}{L\Delta f_{trans}} + \frac{K}{\frac{1}{L} - \Delta f_{trans} - 2\Delta f_{BW}}}{\frac{K}{\Delta f_{trans}}} = \\ &= 1 + \frac{\Delta f_{trans}}{\frac{1}{L} - (\Delta f_{trans} + 2\Delta f_{BW})}. \end{aligned} \quad (11)$$

Из соотношений (10) и (11) видно, что коэффициент вычислительной эффективности интерполи-

рованного фильтра и коэффициент увеличения количества регистров не зависят от коэффициента K , который определяют используемым методом расчета коэффициента фильтра.

Коэффициент интерполяции вычисляют в процессе расчета коэффициентов фильтров, и целесообразно выбрать его исходя из условия минимизации вычислительных затрат, требуемых для расчета отклика интерполированного фильтра.

Определение оптимального коэффициента интерполяции

Для определения оптимального коэффициента интерполяции L_{opt} найдем производную по L из соотношения (10) для коэффициента вычислительной эффективности, приравняем ее к нулю, упростим и в результате получим квадратное уравнение

$$\left[(\Delta f_{trans} + 2\Delta f_{BW})^2 - \Delta f_{trans} \right] L_{opt}^2 - 2(\Delta f_{trans} + 2\Delta f_{BW}) L_{opt} + 1 = 0.$$

Решая это уравнение и отбрасывая случай с потенциально отрицательным коэффициентом интерполяции, получаем

$$L_{opt} = \frac{1}{\Delta f_{trans} + 2\Delta f_{BW} + \sqrt{\Delta f_{trans}}}. \quad (12)$$

Согласно формулам (10) и (12), коэффициент вычислительной эффективности интерполированного фильтра при оптимальном коэффициенте интерполяции достигает максимальной величины:

$$E_{max} = \frac{1}{\Delta f_{trans} + 2\sqrt{\Delta f_{trans}} + 2\Delta f_{BW}}. \quad (13)$$

На основании формул (11) и (12) коэффициент увеличения количества регистров интерполированного фильтра при максимальной вычислительной эффективности и оптимальном значении коэффициента интерполяции находим по формуле

$$U_{opt} = 1 + \sqrt{\Delta f_{trans}}. \quad (14)$$

Анализируя формулы (13) и (14), можно прийти к выводу, что максимально возможный коэффициент вычислительной эффективности растет при уменьшении ширины полосы пропускания и ширины полосы перехода интерполированного фильтра. При этом коэффициент увеличения количества регистров интерполированного фильтра сокращается при уменьшении только ширины полосы перехода.

Следует отметить, что оптимальный коэффициент интерполяции, приведенный в (12), в общем случае является дробным, что физически нереализуемо. Поэтому при реализации фильтра следует выбирать округленное значение оптимального коэффициента интерполяции. Вследствие этого максимальное значение коэффициента вычислительной эффективности, приведенное в формуле (13), фактически является теоретическим пределом для заданных ширин полос пропускания и перехода.

Выводы

Рассмотрены интерполированные КИХ-фильтры нижних частот с точки зрения их вычислительной эффективности. Для интерполированных ФНЧ получено соотношение для определения границы их реализуемости. Установлена взаимосвязь между коэффициентом вычислительной эффективности и параметрами интерполированных ФНЧ, такими как полоса пропускания, полоса перехода и коэффициент интерполяции. Представлены формулы для определения оптимального коэффициента интерполяции и максимально возможного коэффициента вычислительной эффективности при заданных значениях ширин полос пропускания и перехода. Кроме того, получены соотношения для расчета коэффициента увеличения количества регистров интерполированного фильтра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sklar B. *Digital communications: fundamentals and applications*. 2nd ed. N. J., Prentice-Hall PTR, 2001, 1079 p.
2. Ifeachor E. C., Jervis B. W. *Digital signal processing: a practical approach*. New York, Prentice Hall, 2002, 933 p.
3. Lyons R. G. *Understanding digital signal processing*. N. J., Prentice Hall, 2011, 954 p.
4. Saramaki T., Neuvo Y., Mitra S. K. Design of computationally efficient interpolated FIR filters. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1988, vol. 35, no. 1, pp. 70–88.
5. Гладких М. О., Савиных И. С. Полосовые интерполированные фильтры // Вопросы радиоэлектроники. 2017. № 4. С. 16–23.

REFERENCES

1. Sklar B. *Digital communications: fundamentals and applications*. 2nd ed. N. J., Prentice-Hall PTR, 2001, 1079 p.
2. Ifeachor E. C., Jervis B. W. *Digital signal processing: a practical approach*. New York, Prentice Hall, 2002, 933 p.
3. Lyons R. G. *Understanding digital signal processing*. N. J., Prentice Hall, 2011, 954 p.
4. Saramaki T., Neuvo Y., Mitra S. K. Design of computationally efficient interpolated FIR filters. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1988, vol. 35, no. 1, pp. 70–88.
5. Gladkikh M. O., Savinykh I. S. Interpolated band pass filters. *Voprosy radioelektroniki*, 2017, no. 4, pp. 16–23. (In Russian).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Савиных Иван Сергеевич, к.т.н., доцент кафедры радиоприемных и радиопередающих устройств, Новосибирский государственный технический университет, 630073, Новосибирск, просп. Карла Маркса, д.20, тел.: +7 (383) 346-15-46, e-mail: isavinykh@mail.ru.

Чемасов Дмитрий Алексеевич, магистрант кафедры радиоприемных и радиопередающих устройств, Новосибирский государственный технический университет, 630073, Новосибирск, просп. Карла Маркса, д.20, тел.: +7 (383) 346-15-46, e-mail: dm-95@mail.ru.

AUTHORS

Savinykh Ivan, PhD, associate professor of the Department of Radio Receiving and Radio Transmitting Devices, Novosibirsk State Technical University, 20, prospekt Karla Marksa, Novosibirsk, 630073, Russia, tel.: +7 (383) 346-15-46, e-mail: isavinykh@mail.ru.

Chemasov Dmitry, master's degree student of the Department of Radio Receiving and Radio Transmitting Devices, Novosibirsk State Technical University, 20, prospekt Karla Marksa, Novosibirsk, 630073, Russia, tel.: +7 (383) 346-15-46, e-mail: dm-95@mail.ru.